Über Volumen und Oberfläche der Krystalle.

Von Dr. Albrecht Schrauf,
Universitätsdocent und Custosadjunct am k. k. Hof-Mineraliencabinet.

(Mit 1 Tafel.)

§. 1. Ein für den Causalnexus der Formen wichtiges und interessantes Capitel ist jenes über die Ermittlung des Volumen der Körper. Naumann hat bereits 1830 in seiner ausgezeichneten Krystallographie diesem Gegenstande seine Aufmerksamkeit geschenkt, doch — wenn auch die Formen seither invariabel blieben, so wechselten denn doch die den Untersuchungen zu Grunde gelegten Theorien.

Die Drucklegung meines Lehrbuches der physikalischen Mineralogie war für mich nun Veranlassung die ziemlich weitläufigen Rechnungen nach den Grundzügen des von mir befolgten Systems auf's neue durchzuführen, und ich gebe hiervon in nachfolgenden Zeilen die Resultate.

Der Körperinhalt jeder Form kann berechnet werden, wenn man die Gestalt in Theilpyramiden zerlegt, für welche die Flächen der Form die Basis bilden und der Scheitel im Coordinatenmittelpunkte liegt. Das Volumen des Körpers ist sodann die Summe der Volumina dieser Theilpyramiden, so wie die Oberfläche die Gesammtsumme der Flächen dieser Basen.

Da nun das Volumen einer Pyramide eine bekannte Function der Oberfläche und Höhe — letztere fällt bei der obigen Hypothese mit der Länge der Flächennormale zusammen — ist, so erübrigt nur die Formeln für die Oberfläche der als Basis zu betrachtenden Flächen aufzustellen.

Die Addition der Werthe liefert Kubikinhalt und Oberfläche der Form, die Specialisirung von $(\xi\eta\zeta,\ a\ b\ c)$ wird die Systeme, jene von (hkl) die Formen liefern.

§. 2. Sei in Fig. 1 das Volumen der Pyramide $(HKLO)$ zu ermitteln, so ist, unter der Voraussetzung beliebiger Werthe von $(\xi\eta\zeta)$ und $(a\ b\ c)$ — letztere sind ident mit den Axenlängen OA, OB, OC — und von OP als Normale auf die Fläche P (hkl).

$$\mathrm{Vol}\,[HKLO] = \frac{1}{3}\, OP \times \triangle [HKL]$$

$$OP = \frac{a}{h}\cos PX = \frac{b}{k}\cos PY = \frac{c}{l}\cos PZ$$

$$\triangle\,(HKL) = \frac{1}{2}\,xy\sin \mathrm{L} = \frac{1}{2}\,xy\left[\frac{1}{xy}\sqrt{x^2y^2 - \left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2}\right)^2}\,\right]$$

Aus dieser Gleichung folgt da

$$x^2 = ol^2 + ok^2 - 2.\ ok.\ ol.\ \cos\xi$$
$$y^2 = ol^2 + oh^2 - 2.\ oh.\ ol.\ \cos\eta$$
$$z^2 = oh^2 + ok^2 - 2.\ oh.\ ok.\ \cos\zeta$$

$$oh = \frac{a}{h}\ ;\ ok = \frac{b}{k}\ ;\ ol = \frac{c}{l}\ ;$$

$$\triangle\,(HKL) = \frac{1}{2hkl^2}\sqrt[2]{\left[(c^2k^2 + b^2l^2 - 2bc\,kl\cos\xi)\,(c^2h^2 + a^2l^2 - 2achl\cos\eta)\right.}$$
$$\left. - \,(c^2hk + abl^2\cos\zeta - ackl\cos\eta - bchl\cos\xi)^2\right].$$

Aus der Verbindung dieser Gleichungen folgt nun Volumen und Oberfläche der Partialpyramide. Die in den nachfolgenden Formeln angewendeten Coëfficienten 2, 4, 8 deuten die Zahl der zu summirenden Theilpyramiden an, um zur Kenntniss der ganzen Form zu gelangen, die Nenner hingegen M_1 . . . M_6 sind die bekannten bei der Bestimmung der $\cos PX$. . . sich entwickelten Werthe [1]), welche sich durch systemgemässe Specialisirung von $(\xi\eta\zeta\ abc)$ von einander ableiten lassen.

$$M_1 = h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2\sin^2\zeta$$
$$- \,2abc\,[chk(\cos\zeta - \cos\xi\,\cos\eta) + bhl\,(\cos\eta$$
$$- \cos\xi\,\cos\zeta) + akl\,(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)]$$

---

[1]) Für die Ableitung der Werthe M_1 . . . M_6 kann ich auf mein demnächst erscheinendes Lehrbuch der physikalischen Mineralogie. I. Theil, Cap. 9 verweisen.

1. Triclinisches System

$$O_1[hkl]=\frac{2}{2hkl^2}\sqrt[2]{\begin{array}{l}[(c^2k^2+b^2l^2-2bckl\cos\xi)(c^2h^2+a^2l^2-2achl\cos\eta)\\ -(c^2hk+abl^2\cos\zeta-ackl\cos\eta-bchl\cos\xi)^2]\end{array}}$$

$$V_1\,[hkl]=\frac{abc}{3\,M_1}\,O_1\,[hkl]$$

2. Monoclinisches System

$$O_2\,[hkl]=\frac{4}{2\,hkl^2}\sqrt[2]{\begin{array}{l}[(c^2k^2+b^2l^2)\,(c^2h^2+a^2l^2-2achl\cos\eta)-\\ -(c^2hk-ac\,kl\cos\eta)^2]\end{array}}$$

$$V_2\,[hkl]=\frac{abc}{3\,M_2}\,O_2\,[hkl]$$

3. Prismatisches System

$$O_3\,[hkl]=\frac{8}{2\,hkl^2}\sqrt[2]{[(c^2k^2+b^2l^2)\,(c^2h^2+a^2l^2)-(c^2hk)^2]}$$

$$V_3\,[hkl]=\frac{abc}{3\,M_3}\,O_3\,[hkl]$$

4. Orthohexagonales System

$$O_4\,[hkl]=\frac{8}{2\,hkl^2}\sqrt[2]{[(c^2k^2+a^2l^2)(c^2h^2+3a^2l^2)-c^4h^2k^2]}$$

$$V_4\,[hkl]=\frac{ac}{\sqrt{3}\,M_4}\,O_4\,[hkl]$$

5. Pyramidales System

$$O_5\,[hkl]=\frac{8}{2\,hkl^2}\sqrt[2]{[(c^2k^2+a^2l^2)\,(c^2h^2+a^2l^2)-c^4h^2k^2]}$$

$$V_5\,[hkl]=\frac{ac}{3\,M_5}\,O_5\,[hkl]$$

6. Tesserales System

$$O_6\,[hkl]=\frac{8}{2\,hkl^2}\sqrt[2]{[(k^2+l^2)\,(h^2+l^2)-h^2k^2]}$$

$$V_6\,[hkl]=\frac{1}{3\,M_6}\,O_6\,[hkl]$$

§. 3. Durch diese Formeln ist es nun möglich, zur Kenntniss des Volumen in allen jenen Fällen zu gelangen, in welchen die Endpunkte der Partialpyramiden in den Axenebenen liegen und also einen vollständigen Oktanten umfassen.

Durch die höhere Symmetrie der gleichen Parameter entstehen aber im tesseralen, pyramidalen und orthohexagonalen System Formen, wo in einem Oktanten mehrere Flächen vorkommen und hierdurch die directe Anwendung der obigen Formeln unmöglich ist.

Die directe Berechnung solcher Formen, ich erwähne Tetracontaoktaëder, 8- und 12seitige Pyramide, Rhomboëder, Skalenoëder, kann darauf basirt werden, die Zwischenaxen, d. i. die Verbindungslinien des Coordinatenmittelpunktes mit den Endpunkten der Flächen, welche jedesmal in Dreiecke zerlegt werden müssen, als neue secundäre, triclinische Axen aufzufassen, deren Länge und Lage aus den bekannten Daten zu berechnen und schliesslich mittelst derselben und der obigen Formeln zur Volumberechnung überzugehen.

In einzelnen Fällen, namentlich bei Vorhandensein eines symmetrisch horizontalen Durchschnittes führt eine zweite indirecte Methode zum Ziele, welche darin besteht, die in der Coordinatenebene (XY) liegende Fläche als Basis und die hierauf senkrechte (also parallel Z) als Normale, d. i. Höhe anzunehmen.

§. 4. In den nachfolgenden Zeilen sind die Volumsbestimmungen der Hauptformen angeführt, die Oberfläche lässt sich durch die Kenntniss der Normale leicht daraus ableiten. Um die Anführung der oft weitläufigen Rechnungen zu ersparen, so habe ich nur die Ermittlung der Hauptformen angegeben.

A. Tesserales System.

a) Holoëdrische Formen: Tetracontaoktaëder (hkl), Ikositraëder (hll), Triakisoktaëder (hhl), Tetrakishexaëder (hko), Rhombendodekaëder (110) Oktaëder (111), Hexaëder (100).

Zur Erläuterung der an der allgemeinsten Form (hkl) durchzuführenden Rechnungen diene Fig. 2; in welchem der positive Oktant des Tetracontaoktaëder dargestellt ist.

Aus den allgemeinen Eigenschaften der Form folgt, dass

$$PA = PB = PC$$
$$OA = OB = OC$$
$$POA = POB = POC$$

OP coincidirt somit mit der Normale auf die Oktaëderfläche und die Winkel sind somit

$$\cos(POA = POB = POC) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\operatorname{tang}(POA = POB = POC) = \sqrt{2}$$

Nach diesen Erörterungen könnte die directe Berechnungsmethode durch die Zerfällung der Form in 8 gleiche Pyramiden, deren Scheitel in O liegt, beginnen; wo dann die Partialoberfläche (APM) einer derselben gesucht und mittelst der Normale auf (hkl) das Volumen ermittelt werden kann.

Ein zweiter indirecter Weg — der auch im nachfolgenden beibehalten ist, besteht für das Volumen der Pyramide $POAM$ darin, die Fläche AOM als Basis und die Senkrechte von P (Pn), als Höhe anzunehmen.

Es ist nun

$$\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = 45^0$$
$$\operatorname{tang}\psi = \frac{Ok}{OA} = \frac{h}{k} \quad ; \quad \psi = \operatorname{Arctang}\frac{h}{k}$$
$$-\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}(45 + \psi) \quad ; \quad \varphi = \operatorname{Arc.tang}\left(\frac{h+k}{h-k}\right)$$
$$\sin\varphi = \frac{k+h}{\sqrt{2}\sqrt{h^2+k^2}} \quad ; \quad \sin\psi = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$AM = \frac{\sin 45}{\sin\varphi}\, OA = \frac{\sqrt{(h^2+k^2)}}{h(h+k)}$$
$$OM = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\, OA = \frac{\sqrt{2}}{h+k}$$
$$\triangle\; OAM = \frac{1}{2}\,\frac{1}{h(h+k)}$$

Nach Ermittlung der Basis ist die Höhe $Pn = ON$ zu bestimmen.

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{OM}{OL} = \frac{\sqrt{2}\, l}{h+k}$$
$$PN = NL \operatorname{tang}\lambda = NO \operatorname{tang} PON$$
$$NO = PN = \frac{1}{h+k+l}$$

Aus diesen beiden Resultaten folgt als Volumen der Partialpyramide $POAM$

$$\mathrm{Vol}(POAM) = \frac{1}{6}\frac{1}{h\,(h+k)\,(h+k+l)}\,.$$

Da nun die vollständige Form des Tetracontaoktaëder aus 48 solcher Theilgestalten besteht, so ergibt sich für denselben nachfolgender Kubikinhalt, wobei $h>k>l$ gesetzt ist.

$$V_6\,(hkl) = \frac{8}{h\,(h+k)\,(h+k+l)}.$$

Aus dem bekannten Volumen berechnet sich die Oberfläche durch die Hinzufügung der Coëfficienten: $^1/_3$ Normale auf die Oberfläche.

Letztere ist daher für den Tetracontaoktaëder.

$$O_6\,(hkl) = 24\frac{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}{h\,(h+k)\,(h+k+l)}.$$

Nach dieser Methode berechnet sind die im folgenden angegebenen Resultate; die Oberfläche wurde nicht angegeben, da sie sich immer leicht berechnen lässt. $h>k>l$.

1. Tetracontaoktaëder. $V_6\,(hkl) = 8\dfrac{1}{h\,(h+k)\,(h+k+l)}$

2. Ikositetraëder. $V_6\,(hll) = 8\dfrac{1}{h\,(h+l)\,(h+2l)}$

3. Triakisoktaëder. $V_6\,(hhl) = 4\dfrac{1}{h^2\,(2h+l)}$

4. Tetrakishexaëder. $V_6\,(hko) = 8\dfrac{1}{h\,(h+k)^2}$

5. Dodekaëder. $V_6\,(110) = 2$

6. Oktaëder. $V_6\,(111) = \dfrac{4}{3}$

7. Hexaëder. $V_6\,(100) = 8.$

b) Parallelflächig hemiedrische Formen: Dyakisoktaëder $\pi\,(hkl)$ und Pentagondodekaëder $\pi\,(hko)$.

1. Dyakisoktaëder. $V_6\,\pi\,(hkl) = 4\dfrac{(2h^2-hk-hl)}{h\,(h^2-kl)\,(h^2+hk+hl)}$

2. Pentagondodekaëder. $V_6\, \pi (hko) = 4 \dfrac{(2h - k)}{h^3 (h + k)}$

c) Geneigtflächig hemiedrische Formen: Hexakistetraëder $\varkappa\, (hkl)$, Trigondodekaëder $\varkappa\, (hll)$, Deltoiddodekaëder $\varkappa\, (hhl)$, Tetraëder $\varkappa\, (111)$.

1. Hexakistetraëder. $V_6\, \varkappa\, (hkl) = 8 \dfrac{1}{h\,[\,(h+k)^2 - l^2]}$

2. Trigondodekaëder. $V_6\, \varkappa\, (hll) = 8 \dfrac{1}{h^2\,(h + 2l)}$

3. Deltoiddodekaëder. $V_6\, \varkappa\, (hhl) = 8 \dfrac{1}{h\,(4h^2 - l^2)}$

4. Tetraëder. $V_6\, \varkappa (111) = \dfrac{8}{3}$

B. Pyramidales System.

a) Holoëdrische Formen. Ditetragonale Pyramiden (hkl), Protopyramiden (hkl), Deuteropyramiden (hol).

Die Ableitung des Volumen der achtseitigen Pyramide ist nach den bei Tetracontaoktaeder angewendeten Verfahren leicht.

Nimmt man wieder den horizontalen Durchschnitt als Basis der Theilpyramiden, so ist durch die Coordinate (ZZ') auch zugleich die Höhe gegeben, welche daher mit $\dfrac{1}{l}$ coincidirt.

Da also die Höhe hierdurch bekannt ist, so ist zum Volumen nur die Basis noch zu bestimmen.

In Fig. 3 ist

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{h}{k}\ ; \ \sin \psi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}\,,$$

$$\varphi = \text{Arc. tang} \left(\frac{h + k}{h - k}\right)\ ; \ \sin \varphi = \frac{h + k}{\sqrt{2}\,\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$OM = OA \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}\, a}{h + k}$$

$$\triangle\ (OAM) = \frac{1}{2}\, \frac{a^2}{h\,(h + k)}$$

Daher in Fig. IV. das Volumen der Theilpyramide

$$Vol\,(OAMC) = \frac{1}{6}\, \frac{a^2 c}{hl\,(h + k)}$$

Da nun die vollständige Form aus 16 Theilpyramiden besteht, so ist das vollständige Volumen und die Oberfläche der ditetragonalen Pyramide *(hkl)*.

$$V_5\,(hkl) = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{hl\,(h+k)}$$

$$O_5\,(hkl) = \frac{8a\sqrt{h^2c^2+k^2c^2+l^2a^2}}{hl\,(h+k)}$$

Es ergeben sich daher für das pyramidale System nachstehende Formeln:

1. Ditetragonale Pyramide. $V_5\,(hkl) = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{hl\,(h+k)}$
2. Protopyramide. $V_5\,(hkl) = \frac{4}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}$
3. Deuteropyramide. $V_5\,(hol) = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}$

b) geneigtflächig hemiëdrische Formen: tetragonale Skalenoëder $\varkappa\,(hkl)$ und Sphenoide $\varkappa\,(hhl)$.

1. Tetragonale Skalenoëder. $V_5\,\varkappa\,(hkl) = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}$
2. Sphenoid. $V_5\,\varkappa\,(hhl) = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}$

c) parallelflächig hemiëdrische Form:

1. Tetragonale Trapozoëder. $V_5\,\pi\,(hkl) = \frac{8\,a^2c\,(h^2+2hk-k^2)}{3\,h^2l\,(h+k)^2}$

C. Orthohexagonales System.

a) Holoëdrische Formen: dihexagonale Pyramide *(hkl)*, Protopyramide (kkl); Deuteropyramide *(okl)*.

Die Berechnung der vollflächigsten Form *(hkl)* $k>h$ ist begründet auf den in Fig. 5 dargestellten Durchschnitt, welcher die Basis der Theilpyramide ist, wobei die Höhe $\frac{1}{l}$ mit der Axe c coincidirt.

In Fig. 5 ist.

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\sqrt{3}k}{h}\ ;\ \sin\psi = \frac{\sqrt{3}\,k}{\sqrt{h^2+3k^2}}\,.$$

$$-\text{tang}\,\varphi = \text{tang}(30^0+\psi)\ ;\ \text{tang}\,\varphi = \frac{h+3k}{\sqrt{3}\,(k-h)}$$

$$\sin\varphi = \frac{h+3k}{2\sqrt{h^2+3k^2}}\ ;\ ON = \frac{2\sqrt{3}\,a}{h+3k}\,.$$

$$\triangle\,(ONB) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}\,a^2}{k\,(h+3k)}$$

Das Volumen in Fig. 6 der Theilpyramide $(CONB)$ ist somit

$$\text{Vol}\,(CNOB) = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\frac{a^2c}{kl\,(h+3k)}$$

Da die vollständige Form 24 solcher Theilpyramiden hat, so ist für dieselbe folgender Werth des Volumen und der Oberfläche geltend, wobei $k>h$ gesetzt.

$$V_4\,(hkl) = \frac{4\sqrt{3}\,a^2c}{kl\,(h+3k}$$

$$O_4\,(hkl) = 12\,\frac{a\sqrt{h^2c^2+3k^2c^2+3l^2a^2}}{kl\,(h+3k)}$$

Es ergeben sich für das orthohexagonale System folgende Resultate:

1. Dihexagonale Pyramide. $V_4\,(hkl) = \dfrac{4\sqrt{3}\,a^2c}{kl\,(h+3k)}$

2. Protopyramide. $V_4\,(kkl) = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2c}{k^2l}$

3. Deuteropyramide. $V_4\,(okl) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\,\dfrac{a^2c}{k^2l}$

b) Parallelflächig hemiëdrische Formen: Hexagonale Skalenoëder $\pi\,(hkl)$; Rhomboëder $\pi\,(kkl)$.

1. Skalenoëder. $V_4\,\pi\,(hkl) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\,\dfrac{a^2c}{k^2l}$

2. Rhomboëder. $V_4\, \pi\, (hkl) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{a^2 c}{k^2 l}$

c) Geneigtflächig hemiëdrische Form: hexagonale Trapezoëder, $\varkappa\, (hkl)$.

1. Trapezoëder. $V_4\, \varkappa\, (hkl) = \frac{4\sqrt{3}\, a^2 c\, (h+k)\, (3k-h)}{k^2 l\, (h+3k)^2}$

d) Parallelflächig tetartoëdrische Form: Tritorhomboëder, $\frac{\pi}{2}\, (hkl)$.

1. Rhomboëder. $V_4\, \frac{\pi}{2}\, (hkl) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{a^2 c}{l\, (h^2 + 3k^2)}$

e) Geneigtflächig tetartoëdrische Form: Trigonale Trapezoëder, $rl\, \frac{\varkappa}{2}\, (hkl)$.

1. Trapezoëder. $V_4\, \frac{\varkappa}{2}\, (hkl) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{a^2 c}{k^2 l} \frac{6hk + 3k^2 - h^2}{(h+k)^2}$

In den folgenden prismatischen Systemen fehlen geschlossene mehrzählige Formen, da für die speciellen Combinationen, aus den gegebenen Verhältnissen der Kantenlinien und Durchschnitte die analytische Entwicklung vorgenommen werden muss.

§. 5. Die im obigen entwickelten Volumina lassen bereits in mehreren Punkten interessante Verhältnisse erkennen.

Während Weiss und Naumann, von der Theorie ausgehend, mehrere dieser in den Volumen verschiedener Körper stattfindender Beziehungen aufstellten, haben von praktischer Construction beginnend, Theodor Gümbel in Landau und namentlich in jüngster Zeit Herr Regimentsarzt Wolff in Libin bei Prag, durch Modelle die gegenseitige Ableitbarkeit verschiedener Formen (bedingt durch rationale Verhältnisse des Kubikinhalts) dargelegt.

Wolff's ausgezeichnete Modelle, welche ich durch Herrn Dr. Volger's Güte vor wenigen Wochen auf der diesjährigen Naturforscherversammlung in Giessen kennen gelernt habe, zeigen in hundertfachen Combinationen durch Zerlegung und neue Verbindung der Theilgestalten den Zusammenhang der Raumverhältnisse.

Während diese Modelle durch die Construction den gestaltlichen Zusammenhang darzulegen versuchen, lässt sich derselbe auch von theoretischer Seite aus den entwickelten Formen ableiten, letzterer bestätigt was erstere zeigen und erstere führen aus, was letzterer angedeutet und ergänzen sich somit auf das innigste.

Aus den entwickelten Formeln ist ersichtlich, dass das pyramidale System mit dem tesseralen in Connex tritt, wenn die Axe c einen rationalen Werth erhält, hierdurch würde aber auch eine krystallographische Transponirung des Systems selbst möglich; anders verhält sich das rhomboëdrische System, welches bei Annahme der Axe $c = \sqrt{3}$ also $(001)(111) = 63^{\circ}\, 26'\, 10''$ oder $-(201)(\bar{1}11) = 116^{\circ}\, 34'$ selbst bei Fortbestand des Systems in einen innigen ableitbaren Verhältnisse zum tesseralen System steht.

Die im nachfolgenden angebenenen Zahlen werden mehr als Worte die gegenseitige Ableitbarkeit der Formen demonstriren.

Für die orthohexagonalen Gestalten ist die Hauptaxe $c=\sqrt{3}$ angenommen.

Um die hier angewendeten krystallographischen Zeichen in die anderen Schulen zu transponiren, verweise ich auf die bekannten Vergleichstabellen [1]).

$$V_6 \quad (100) = 8$$
$$V_4 \quad (011) = V_4\, \pi\, (111) = 4$$
$$V_4 \quad (111) = 3$$
$$V_6\, \varkappa\, (111) = \frac{8}{3}$$
$$V_6 \quad (110) = V_4\, \pi\, (112) = 2$$
$$V_4 \quad (112) = \frac{3}{2}$$
$$V_6 \quad (111) = \frac{4}{3}$$
$$V_6\, \varkappa\, (211) = V_4\, (113) = V_4\, (021) = V_4\, \pi\, (221) = 1$$
$$V_4 \quad (114) = \frac{3}{4}$$
$$V_6\, \pi\, (210) = \frac{1}{2}$$
$$V_4 \quad (131) = \frac{2}{5}$$

---

1) Vergl. Schrauf: Atlas der Krystallformen des Mineralreiches I. Heft, so wie Lehrbuch der physikalischen Mineralogie. I. Theil, Cap. 22.

$$V_6 \quad (211) = \frac{1}{3}$$

$$V_6\, \varkappa\, (221) = \frac{4}{15}$$

$$V_6 \quad (221) = \frac{1}{5}$$

$$V_6 \quad (310) = \frac{1}{6}$$

$$V_6 \quad (311) = V_4\, (133) = \frac{2}{15}$$

$$V_6\, \varkappa\, (321) = \frac{1}{9}$$

$$V_6\, \pi\, (321) = \frac{2}{21}$$

$$V_6 \quad (411) = \frac{1}{15}$$

$$V_6 \quad (421) = \frac{1}{21}$$

Aus diesen Zahlen lassen sich vielfache Vergleiche darstellen und es bleibt dann Aufgabe des Modelleurs, dieselbe auch praktisch durchzuführen; dass sie aber für die Kenntniss der Formen nicht ohne Interesse sind, mag man aus Beispiele erkennen, dass das Volumen

eines Hexaëders dem zweier Rhomboëder ($c = \sqrt{3}$)

das eines Rhomboëders gleich dem 2 Rhombendodekaëder;

das eines Ikositetraëder dem einer dihexagonalen Pyramide gleich ist.

Bravais hat vor längerer Zeit versucht, die Ausbildung der einzelnen Formen von Oberfläche und Volumen abhängig zu machen, ohne entscheidende Resultate zu erringen; möglich, dass mit dem Fortschritt der Theorie auch dieses Capitel der Krystallphysik seiner Lösung nahe rückt.